オンライン ISSN 1347-4448
印刷版 ISSN 1348-5504

赤門マネジメント・レビュー 9 巻 7 号 (2010 年 7 月)

探索の効果と淘汰の効果*

―経営学輪講 Nelson and Winter (1982), Chapters 6, 7―

Nelson, R. R., & Winter, S. G. (1982). Static selection equilibrium (chap. 6, pp. 139–162). Firm and industry response to changed market conditions (chap. 7, pp. 163–192). In R. R. Nelson & S. G. Winter, *An evolutionary theory of economic change*. Cambridge, MA: The Belknap Press of Harvard University Press.

若林 隆久[†]·氷熊 大輝[‡]·岡本 伊織[§]

要約：進化理論のモデルでは、経済的淘汰の力がもたらす淘汰均衡は、正統派経済学の均衡と似た性質をもつが、利潤最大化ルール以外の企業も生き残るという違いがある。そして、市場条件の変化に対する企業と産業の反応も異なり、(A)経済の通常の効果、(B)探索の効果、(C)淘汰の効果、の三つの効果が生じる。正統派経済学では考慮されてこなかった(B)探索の効果と(C)淘汰の効果についてモデル化が行われ、正統派経済学の予測と整合的な標準的な結果がもたらされることが示される。

本稿では、Richard R. Nelson と Sidney G. Winter による *An Evolutionary Theory of Economic Change*（邦題：『経済変動の進化理論』）[1] の第 III 部 “Textbook economics

* この経営学輪講は Nelson and Winter（1982）の解説と評論を若林・氷熊・岡本が行ったものです。当該論文の忠実な要約ではありませんのでご注意ください。図表も若林・氷熊・岡本が解説のために Nelson and Winter（1982）を元に整理し直したものです。したがいまして、本稿を引用される場合には、「若林・氷熊・岡本（2010）によれば、Nelson and Winter（1982）は…」あるいは「Nelson and Winter（1982）は（若林, 氷熊, 岡本, 2010）」のように明記されることを推奨いたします。

† 東京大学大学院経済学研究科・日本学術振興会特別研究員 DC　taka17@deluxe.ocn.ne.jp
‡ 東京大学経済学部　daiki.higuma@gmail.com
§ 東京大学経済学部　iori.okmt@gmail.com

1 リチャード・R・ネルソン、シドニー・G・ウィンター（2007）『経済変動の進化理論』後藤晃, 角南篤, 田中辰雄 訳. 慶應義塾大学出版会。本稿は原著を元に書いており、邦訳と訳や解釈が異

revisited”（教科書的経済学再考）を構成する二つの章、第 6 章 “Static selection equilibrium”（淘汰均衡の静学）と第 7 章 “Firm and industry response to changed market conditions”（市場条件の変化に対する企業と産業の反応）のモデルの紹介と解説を行う。第 6 章は Winter（1964, 1971）を、第 7 章は Nelson and Winter（1975, 1980）をもとにして書かれた章である。

第 6 章では、経済的淘汰がもたらす淘汰均衡と正統派経済学が想定する均衡との関係について検討を行う。進化理論のモデルでは、経済的淘汰の力がもたらす淘汰均衡は、マルコフ連鎖における吸収状態として定義される。すなわち、一度その淘汰均衡の状態に到達すると、そのままその状態にとどまり続ける。このマルコフ連鎖の吸収状態における企業行動は、正統派経済学の均衡における企業行動と類似した性質——①最適な技術を用いて②100％の設備稼働率で生産を行い③利潤はゼロ——を持っている。しかし、その一方で、実は利潤最大化ルール以外の企業でも生存しうるという点では、正統派経済学の均衡とは異なっている。このような企業が持つ意思決定ルールの違いは均衡が変化した際に生じる調整過程に変化をもたらす。また、モデルの条件によって正統派経済学の均衡とは異なる非正統派的均衡に到達する。すなわち、到達する均衡点そのものが異なってしまうのである。以上のように、第 6 章の進化理論のモデルでは正統派経済学とは異なる帰結が生じることが明らかにされる。

第 7 章では、市場条件の変化に対する企業と産業の反応が検討される。第 1 節では、進化理論のモデルを用いて、市場条件の変化に応じて生じる変化が、(A)経済の通常の効果、(B)探索の効果、(C)淘汰の効果、の三つの効果に分けられることが示される。これらのことは、進化理論で想定される変化が正統派的経済学で想定される変化とは異なっていることを意味している。第 2 節では、第 1 節で明らかになった三つの効果のうち正統派経済学では想定されてこなかった(B)探索の効果と(C)淘汰の効果のモデル化が行われる。二つの投入要素が存在するマルコフ連鎖のモデルを用いて、要素価格の変化に対して生じる(B)探索の効果と(C)淘汰の効果が、企業と産業の要素比率の変化に関して標準的な結果をもたらすことが示される。

本稿では、数式を詳細にトレースし、これら二つのモデルの紹介と解説を行う。ただし、第 6 章・第 7 章に記載されている数式のみでは、途中の式変形が省略されている部分があったり、数式的に説明できることを言葉で説明している部分があったりするため、十

なる場合にはその旨を明記した。

表 1　数式の色による区別

数式・記号の種類	**表示色**
第 6 章・第 7 章内に記載されている数式・記号	黒
省略されている途中の式変形を補った数式・記号	緑
説明のために新しく本稿で付け足した数式・記号	青
原著で間違っている数式・記号	赤
邦訳で間違っている数式・記号	紫

分にモデルを理解できない。そこで本稿では表 1 の通り、第 6 章・第 7 章に記載されている数式・記号（黒で表示）に付加して省略されている途中の式変形を補い（緑で表示)、さらに説明のために必要な数式・記号も全く新しく付加している（青で表示)。また、原著や邦訳の数式・記号で見つけた誤りについては、原著での誤りは赤、邦訳での誤りは紫、で表示する。

数式の番号は、第 6 章に記載されている数式にはもともと番号は付いていないため、説明の便宜上登場する順番に番号付けを行った。第 7 章に記載されている数式については数式番号が第 7 章と同じになるように番号付けを行った。

なお、本稿の数式以外の部分は、第 6 章・第 7 章の内容を解説するために書き下ろしたものである。

1. 第 6 章 「淘汰均衡の静学」

第 6 章では、経済的淘汰（economic selection）がもたらす淘汰均衡（selection equilibrium）について検討を行う。一般には経済的淘汰の力が静学的な均衡をもたらすとは限らないが、ここでは必然的に静学的な均衡に到達するモデルを用いて、それと正統派経済学の均衡（正統派経済学における、企業は利潤を最大化しようと行動し、その結果として利潤はゼロであり、長期的[2] である均衡)[3] との関係を検討する。[4]

[2] 第 6 章には、短期（short-run）と長期（long-run）という表現が登場する。短期はある時点における状態であることを指しており、長期は状態が継続することを意味している。長期の均衡（long-run equilibrium）という表現は、その均衡が継続することを示している。

[3] 均衡の概念は正統派経済学のモデル構造の二つの柱のうちのひとつとされている（pp. 11–14, 邦訳, pp. 13–16)。

[4] この点について Nelson と Winter は、第 6 章のモデルにおいて静学的な均衡が達成されるために

従来、淘汰均衡と正統派経済学の均衡との関係については二つの立場が存在していた。ひとつは、経済的淘汰の力が利潤最大化を行う企業のみを選択し正統派経済学と同様の均衡をもたらすという Milton Freedman に代表される立場である。もうひとつは、経済的淘汰の力が正統派経済学と同様の均衡をもたらすとは限らないという Armen Alchian に代表される立場である。

第 6 章のモデルは、前者を否定し後者と整合的であるような結果をもたらす。第 6 章のモデルは正統派経済学の均衡と類似した正統派的淘汰均衡をもたらしうる。すなわち、均衡に存在する企業が、①最適な技術を用いて②100％の設備稼働率で生産を行い③利潤がゼロであるという点でこれらの均衡は同じである。正統派的淘汰均衡の均衡価格・均衡生産量・均衡資本量も正統派経済学の均衡と同様である。しかし、正統派経済学の均衡では利潤最大化を行う企業しか存在しないが、正統派的淘汰均衡では利潤最大化行動をとらない企業であっても均衡において 100％の設備稼働率をもたらすような適格なルール（eligible rule）を持っていれば生存しうるという点が異なっている（適格なルールを持っている企業は、見かけ上は最適な技術を用いて 100％の設備稼働率で生産を行うという利潤最大化行動をとっているが、利潤最大化を行うという意思決定ルールを持っているわけではない）。このような企業が持つ意思決定ルールの違いは均衡が変化した際に生じる調整過程に変化をもたらす。

また、利用可能な設備稼働ルールの集合の中に適格な設備稼働ルールが存在しない場合

表 2　第 6 章で取り扱われる均衡の比較

	正統派経済学の均衡	淘汰均衡	
		正統派的淘汰均衡	非正統派的淘汰均衡
用いられる技術	最適な技術	最適な技術	最適な技術
設備稼働率	100%	100%	$\hat{a}$（not 100%）
意思決定ルール	利潤最大化ルール	適格なルール	擬似的に適格なルール
利潤	ゼロ	ゼロ	ゼロ
均衡価格	P^*	P^*	P^{**}
均衡生産量	q^*	q^*	$\hat{a}k^{**}$
均衡資本量	k^*	k^*	k^{**}

注）黄色いセルは正統派経済学の均衡と異なることを示している。

「確固とした理論的根拠を持たないいくつかの微妙な仕掛け（some delicate contrivances that have no independent rationale, p. 143）」や「技術的な仮定（technical assumptions, p. 157, 邦訳, p. 197）」が用いられていると述べている。モデルが均衡に到達することの証明については付録 A 参照。

にはモデルは正統派経済学の均衡とは異なる非正統派的均衡（unorthodox equilibrium）に到達する。非正統派的均衡では、企業は①最適な技術を用いており③利潤はゼロであるが、設備稼働率は 100%ではなく、したがって均衡価格・均衡生産量・均衡資本量も正統派経済学の均衡や正統派的淘汰均衡とは異なるものになる。すなわち、到達する均衡点そのものが異なってしまうのである。

以上のように、進化理論のモデルでは正統派経済学とは異なる帰結が生じることが明らかにされる。第 6 章で取り扱われる均衡の特徴をまとめたものが表 2 である。

1.1. モデル

それでは、Nelson と Winter が上記の結論を導き出した第 6 章のモデルを見ていこう。1.1.1.で、第 6 章のモデルの基本的な内容を解説する。1.1.2.で、このモデルにおいて正統派経済学の均衡が存在することを示す。1.1.3.で、モデルに付け加えられる淘汰過程に関する仮定を説明する。1.1.4.で、淘汰過程に関する仮定が付け加えられたモデルにおける淘汰均衡について述べる。1.1.5.で、利用可能な設備稼働ルールの集合の中に適格な設備稼働ルールが存在しない場合はこのモデルにおいて非正統派的均衡が生じうることを示す。

1.1.1. 基本的なモデル（pp. 144–146, 邦訳, pp. 181–183）

第 6 章のモデルでは、各企業は二つのルーチンを持っている。ひとつは企業が生産に用いる技術（technique）である。もうひとつは、企業の設備稼働率と生産量を決定する意思決定のルール（decision rule）である。ある企業によって所有される設備は、すべて同じ技術を使用し、同じ設備稼働ルールに基づいて操業される。

ひとつ目のルーチンである技術は、企業の生産する製品の単位変動生産費用（unit variable production cost）を決定する。産業は単一の同質な製品を生産しており、各企業はひとつの技術のみを使用する。産業内のすべての企業は同じ集合の中から技術を選択する(企業によって発見して使用できる技術の集合が異なるということはない)。すべての技術は、規模に対して収穫一定で可変的な投入要素についての固定的な投入係数によって特徴付けられている。すべての技術の資本産出比率は同じである（＝1)。技術は可変的な投入要素について異なっている。生産要素は完全に弾力的に産業に供給され、すべての投入要素の価格は正で一定である。このためすべての技術は、単位変動生産費用によって特徴づ

けられ比較される。最適な技術がただひとつ存在すると仮定し、最適な技術を用いた時の単位変動生産費用を$\hat{c}$とする。

二つ目のルーチンである設備稼働率ルール（capacity utilization rule)α(・）は、価格費用比率（単位変動生産費用と価格の比率）によって設備稼働率を決める決定ルールである。製品価格を P、単位変動生産費用を c、資本（キャパシティ）を k とすると、生産量 q は以下のように示せる。

（1） $q = \alpha\left(\frac{P}{c}\right)k$

α(・)は、単調非減少の連続関数であり、変数の値が十分に大きい場合は正の値をとり 0≦α(・)≦1 を満たすと仮定する。設備稼働率ルールは、企業が様々な設備稼働率で操業するために必要な価格費用比率を表すものと解釈できる。もちろんどのような技術についても、総単位生産費用は設備稼働率に対して負の相関を持つ。

ここで、正統派経済学が想定する利潤最大化を行う設備稼働率ルールがもたらす生産量は以下の通りである。[5]

（2） $$\left.\begin{array}{l} q = 0 \\ 0 \leqq q \leqq k \\ q = k \end{array}\right\} \text{ それぞれ } \left\{\begin{array}{l} \frac{P}{c} < 1 \\ \frac{P}{c} = 1 \\ \frac{P}{c} > 1 \end{array}\right. \text{ のとき}$$

すなわち、製品価格が単位変動生産費用より低い場合には（$P<c$)、生産を行うと損失が生じるので生産は行われない（$q=0$)。製品価格と単位変動生産費用が等しい場合には($P=c$)、生産を行っても利益も損失も生じないので 0%から 100%の間の任意の稼働率で生産を行う（$0 \leqq q \leqq k$)。製品価格が単位変動生産費用より高い場合には（$P>c$)、生産を行うと利益が生じるので設備稼働率は 100%となる（$q=k$)。

このような利潤最大化を行う設備稼働率ルール(2)式は、唯一の最適な（unique best）設備稼働率ルールであり、より優れている設備稼働率ルールは存在しない。[6]

---

[5] この利潤最大化を行う設備稼働ルール（2）式は、$P=c$ のとき一定範囲の生産量を許容することから厳密には前述したような連続的な関数にはなっていない。しかし、収益性が製品価格の連続関数となるため問題は生じない。この点については第 6 章脚注 3（p. 145, 邦訳, p. 183）で述べられている。

[6] ただし、(ア)利潤最大化を行う設備稼働率ルールが必ずしも存在しているとは限らない（モデル

産業は厳密に右下がりの連続的な需要価格関数に面している。需要価格関数はすべての非負の産出水準に対して定義されている。もし産業の総生産量が十分に小さければいくつかの技術と設備稼働率ルールは正の利潤を生み出すが、もし産業の総生産量が十分に大きければどのような技術と設備稼働率ルールも利潤を生み出さない、と仮定する。

上記の前提からモデルは以下のように定式化される。時点 t における企業 i の状態は、技術によって決定する単位変動生産費用、設備稼働ルール、資本（キャパシティ）の組 $(c_{it},\ \alpha_{it},\ k_{it})$ によって表される。時点 t におけるすべての企業の状態は、時点 t における産業の短期の供給 q_t

(3) $$q_t = \sum q_{it} = \sum \alpha_{it}\left(\frac{P_t}{c_{it}}\right)k_{it}$$

を決定する。同時に需要価格関数 $h(\cdot)$ により、時点 t における価格 P_t

(4) $$P_t = h(q_t)$$

が決定される。$h(\cdot)$ と $\alpha_{it}(\cdot)$ に関する上記の仮定は、短期の均衡が常に存在することを保証する。

また、企業 i の純利益は、資本サービスの単位当たり費用を r とすると、以下のように表される。

(5) $$\pi_{it} = \left[(P_t - c_{it})\alpha_{it}\left(\frac{P_t}{c_{it}}\right) - r\right]k_{it}$$

1.1.2. 正統派経済学の均衡（pp. 146–147, 邦訳, pp. 183–184）

(ア)企業は間違うことなく利潤を最大化し、(イ)産業には十分な企業が存在するため企業は価格をパラメータとして取り扱う、という正統派の仮定のもとで、このモデルに長期的な正統派経済学の均衡が存在することは明らかである。

均衡において利潤が最大化されているということは、操業している企業は最適な技術を用いている（$q_i > 0$ である企業 i は $c_i = \hat{c}$）。利潤が非負であるためには、均衡価格 P^* は $\hat{c}$

において企業が利用可能な設備稼働ルールの集合の中に利潤最大化を行う設備稼働ルールは含まれていないかもしれない)、(イ)特定の P / c の値に対して同じ生産量をもたらす設備稼働ルールは同じ利潤を生み出す（すなわち、用いている技術と生産量が同じであれば、その企業が使用している設備稼働ルールが利潤最大化を行う設備稼働ルールであろうがそれ以外の設備稼働ルールであろうが生じる利潤は同じになる)、ということに留意する必要がある。

より大きくなければならない。利潤が非負である時、価格が P^* であるときに稼働率が100%となる設備稼働ルールによって利潤が最大化されるが、前述の正統派の想定する利潤最大化を行う設備稼働ルール(2)式はこの条件を満たす。

また、利潤最大化を行う企業が資本を変更しないためには（キャパシティを変更する動機を持たないためには)、企業の利潤はゼロでなくてはならず、(5)式より均衡価格 P^* は $\hat{c}+r$ と等しくなければならない。前述した需要価格関数に関する仮定から、$h(q^*)=\hat{c}+r$ となるような均衡生産量 q^* は存在する。すべての企業が稼働率 100%で操業しているので、$\sum q_i=\sum k_i$ となり、均衡における総資本量は総生産量と等しくなる。規模に対して収穫一定であるため、産業の資本は産業内の企業にどのように分布していても良い。

上記のように、すべての企業が最適な技術と意思決定ルールを使用し、最大化された利潤はゼロである、長期的な正統派経済学の均衡が存在する。

1.1.3. 淘汰過程に関する仮定（pp. 147–149, 邦訳, pp. 184–188）

次に、淘汰均衡が存在するかどうか、淘汰均衡と正統派経済学の均衡とは同じ性質を持つか、ということを明らかにするために、淘汰過程に関する仮定をモデルに組み込む。

後の分析で有限マルコフ連鎖の理論の数学的ツールを用いるために、以下のような仮定が置かれる。利用可能な技術の集合と利用可能な設備稼働ルールの集合はともに有限であり（集合の中に利潤最大化を行う設備稼働ルールは含まれていると仮定する)、資本は(離散的な）正の整数で表される。そのため、企業の状態を表す三つの変数はそれぞれ離散変数となる。また、産業内の企業数は有限で一定（$=M$）であり十分に大きいと仮定する。既存企業（$q_i>0$）と潜在企業（$q_i=0$）の割合のみが変化する。さらに、資本は正の整数であり離散的であるが、$h(q^*)=\hat{c}+r$ となるような均衡生産量 q^*は整数であり、正統派的均衡が存在すると仮定する。

投資については以下のような仮定が置かれる。企業の投資はその企業が生み出す利潤に基づいて確率的に決定される。ただし利潤がゼロである既存企業は投資を行わず現在の規模を維持する（(6)式)。

(6) $k_{t+1}=k_t$

正の利潤を上げている既存企業は、現在の規模を維持するか拡大するかであり、規模を縮小することはない。規模の拡大には制約があるため、Δ を正の整数とすると、(7)式の

ように表される。

$$(7)\quad k_{t+1} = k_t + \delta \quad ここで \begin{cases} \delta < 0 \\ \delta = 0,1 \\ 1 < \delta \leqq \Delta \\ \delta > \Delta \end{cases} となる確率は \begin{cases} = 0 \\ > 0 \\ \geqq 0 \\ = 0 \end{cases}$$

負の利潤を上げている既存企業は、現在の規模を維持するか縮小するかであり、規模を拡大することはない。規模の縮小は企業の現在の資本によって制約されている（企業の資本が負になることはない）ため、(8)式のように表される。

$$(8)\quad k_{t+1} = k_t - \delta \quad ここで \begin{cases} \delta < 0 \\ \delta = 0,1 \\ 1 < \delta \leqq k_t \\ \delta > k_t \end{cases} となる確率は \begin{cases} = 0 \\ > 0 \\ \geqq 0 \\ = 0 \end{cases}$$

正の利潤を生み出すだろう技術と設備稼働ルールの組み合わせを持つ潜在企業は、1 未満の正の確率で資本 1 となる（(9)式)。

(9) $k_{t+1}=0$ or 1　　それぞれ正の確率

正の利潤を生み出さないだろう技術と設備稼働ルールの組み合わせを持つ潜在企業は、参入しない（(10)式)。

(10) $k_{t+1}=0$

探索については以下のような仮定が置かれる。正統派のモデルとは異なり、企業は手探りで時間のかかる探索を行う。探索は、最適な技術や設備稼働ルールが発見されるほどには活発ではあるが、合理的な均衡から外れてしまうほどには活発ではないと仮定される。そこで、既存企業は利潤が負の場合のみ探索を行い（正あるいはゼロの利潤を上げている既存企業は現在のルーチンに満足しているので探索を行わない)、潜在企業は常に探索を行っているが参入する際には収益性が正にならなければならないと仮定する。

1.1.4. 淘汰均衡（pp. 149–151, 邦訳, pp. 188–189)

（静学的な）淘汰均衡は、「すべての既存企業が変化せず、かつ既存企業の名簿も変化しない状態」として定義される。正統派経済学の均衡は明らかに淘汰均衡の要件を満たしている。

一方、淘汰均衡は正統派経済学の均衡の重要な特性のいくつかを示さなくてはならない。淘汰均衡の定義を満たすためには、上記の投資と探索に関する仮定から、すべての企業の利潤はゼロでなければならない。すなわち、均衡における価格は$\hat{c}+r$と等しくなる。価格が$\hat{c}+r$より低ければどの企業の利潤も負となり、企業の規模の縮小が起こりうる。価格が$\hat{c}+r$より高ければ、利潤を上げている企業の規模の拡大が起こりうる。仮に保有しているルーチンの関係ですべての企業が利潤を上げていないとしても、探索の結果最適な技術と設備稼働ルールを発見することで、結局はある企業が利潤を生み出しうる。[7]

上記の淘汰均衡においてすべての既存企業は最適の技術を用いなければならないが、設備稼働ルールは均衡価格$\hat{c}+r$において100％の設備稼働率をもたらすルールであれば正統派経済学が想定する利潤最大化を行う設備稼働ルールである必要はない。そのため、どの企業も利潤最大化を行う設備稼働ルールを用いていないような淘汰均衡も存在する。

ここで上記のように、価格$\hat{c}+r$において 100％の設備稼働率をもたらす、すなわち$\alpha\left(\frac{\hat{c}+r}{\hat{c}}\right)=1$を満たす設備稼働ルールを適格な（eligible）ルール[8] と呼ぶことにする。

すると、淘汰均衡の状態は以下のように表すことができる。産業の状態（industry state）は、M 個の企業の状態のリストである。各企業の状態は、単位変動生産費用、設備稼働ルール、資本（キャパシティ）の組（c_{it}, α_{it}, k_{it}）によって表される。すべての既存企業$i(q_i>0)$は、最適な技術を用いており（単位変動生産費用が$\hat{c}$であり)、適格な設備稼働ルールを使用している。均衡価格 P^* は$\hat{c}+r$と等しく、均衡における総資本量と総生産量は等しく（$k^*=q^*$)、$h(q^*)=\hat{c}+r$が成立している。このような均衡状態における唯一

[7] 厳密には、(ア)価格が$\hat{c}+r$より低い場合には既存企業が存在しない状態で淘汰均衡が成立する、(イ)すべての企業が正の資本を持ち、最適な技術ではない同じ技術と同じ設備稼働ルールを使用しており、すべての企業の利潤がゼロとなっていて探索を行う企業が存在しない（潜在企業は存在していない）という淘汰均衡が存在する、と思うかもしれない。しかし、前者については、需要価格関数に関する「もし産業の総生産量が十分に小さければいくつかの技術と設備稼働率ルールは正の利潤を生み出す」という仮定からこのような淘汰均衡が成立しない。後者については、後述される通り（p. 152, 邦訳, p. 191)、企業数 M が十分に大きいと仮定されるため、必ず利潤が負の企業か潜在企業が存在することとなり、探索を行う企業が少なくともひとつは存在することになる。結果として、最適な技術と適格な設備稼働ルールが発見されることになるので、後者の淘汰均衡は成立しない。

[8] 邦訳では、eligible の訳語として、「望ましい」、「適切な」、「実行可能な」、「適正な」、など複数の語が用いられている。ここでの表現からわかるように、価格$\hat{c}+r$において 100％の設備稼働率をもたらすという条件を満たす設備稼働ルールが eligible rule である。そこで本稿では、訳語の不統一をなくすとともに、上記の条件を満たすものであるということを示すために、eligible に対して一貫して「適格な」という訳語を当てる。

の変化は潜在企業による無益な探索だけである（参入した際に利潤を生み出すようなルーチンの組は存在しない)。そのため、均衡状態は継続する。

1.1.5. 非正統派的均衡（pp. 152–153, 邦訳, pp. 192–193）

それでは、利潤最大化を行う設備稼働ルールを含め適格な設備稼働ルールが利用可能な設備稼働ルールの集合に存在しない場合にはどうなるのであろうか。このとき 100%の稼働率を伴う正統派的均衡は実現不可能である。

すべての設備稼働ルール α に対して、単位変動費用が$\hat{c}$であるときに利潤がゼロとなるような、すなわち以下の式を満たすような最低価格 P^{**} が存在する、

(13) $(P-\hat{c})\alpha\left(\frac{P}{\hat{c}}\right)-r \geqq 0$

P^{**} が達成される時の設備稼働率を $\hat{a}$ とする。ここで、以下の式を満たす正の整数の資本 k^{**} が存在すると仮定する。

(14) $P^{**}=h(\hat{a}k^{**})$

価格と費用の比率が$\frac{P^{**}}{\hat{c}}$の時に設備稼働率 $\hat{a}$ をもたらす設備稼働ルールを擬似的に適格な（pseudo-eligible）ルールと呼ぶ。ここで、「擬似的に適格な」を「適格な」に、P^{**} を P^{*}に、k^{**}を k^{*}に、$\hat{a}k^{**}$を q^{*}に、[9] 置き換えるとこれまでと同じように分析を行える。すなわち、設備稼働率 $\hat{a}$ である正統派的均衡とは異なる淘汰均衡が達成されるという結論が得られる。

1.2. 小括

第 6 章のモデルによって、経済的淘汰がもたらす淘汰均衡が検討された。経済的淘汰の力は、正統派的な淘汰均衡をもたらすこともあれば、非正統派的な淘汰均衡をもたらすこともある。このことは、淘汰過程が何らかの完全な行動の集合（some set of perfect actions）ではなく実際に試みられた行動（actions actually tried）に対して働くということが、もたらされる帰結を変化させるということを示している。

正統派的淘汰均衡は正統派経済学の均衡と類似している。すなわち、均衡に存在する企

[9] 原著には $\hat{a}k^{**}$ と記されているが邦訳では ak^{**} とハットが取れてしまっているため（p. 153, 邦訳, p. 192)、紫で表示した。

業が、①最適な技術を用いて②100％の設備稼働率で生産を行い③利潤がゼロであるという点でこれらの均衡は同じである。正統派的淘汰均衡の均衡価格・均衡生産量・均衡資本量も正統派経済学の均衡と同様である。しかし、正統派経済学の均衡では利潤最大化を行う企業しか存在しないが、正統派的淘汰均衡では利潤最大化行動をとらない企業であっても適格なルールを持っていれば生存しうるという点が異なっている。このような企業が持つ意思決定ルールの違いは均衡が変化した際に生じる調整過程に変化をもたらす。利潤最大化行動を取らない企業も存在しているということから、均衡の位置の変化や均衡間の調整経路が正統派経済学の予想とは異なるものになるだろう。

また、利用可能な設備稼働ルールの集合の中に適格な設備稼働ルールが存在しない場合には、非正統的均衡がもたらされることも明らかになった。非正統派的均衡では、均衡価格・均衡生産量・均衡資本量が正統派経済学の均衡と異なり、到達する均衡点そのものが異なってしまう。

以上のように、経済的淘汰の力がもたらす淘汰均衡は正統派経済学の想定する均衡とは異なることが示された。

2. 第 7 章 「市場条件の変化に対する企業と産業の反応」

第 7 章では、市場条件の変化に対して企業や産業がどのように反応するかを検討する。第 6 章で指摘されたように、均衡を変化させるような市場条件の変化が起きた際の企業や産業の反応が、正統派経済学と進化理論経済学では異なることがモデルを通じて示される。

第 1 節では、進化理論のモデルで市場条件の変化に応じて生じる変化を、(A)経済の通常の効果（along-the-rule effects)、[10] (B)探索の効果（search effects)、(C)淘汰の効果(selection effects)、の三つに分ける。そして、三つの効果は一般的に経験的な証拠や正統派経済学の予測と整合的である標準的な結果をもたらすものの、例外的な結果も起こりうることが述べられる。これらのことは、進化理論で想定される変化が正統派的経済学で想定される変化とは異なっていることを意味している。

[10] along-the-rule effect は、正統派経済学のルールに沿った効果という意味である。邦訳ではこの語を、第 7 章では「ルールに沿った効果」(p. 168, 邦訳, p. 210)、第 10 章では「経済の通常の効果」(p. 245, 邦訳, p. 294)、と訳している。ここでは、正統派経済学のルールに沿った効果というニュアンスを出すためと、若林・氷熊・岡本（2010）と訳語を統一するために、「経済の通常の効果」という訳を採用した。

第 2 節では、第 1 節で明らかになった三つの効果のうち正統派経済学では想定されてこなかった(B)探索の効果と(C)淘汰の効果の分析に焦点が当てられる。二つの投入要素が存在するマルコフ連鎖のモデルを用いて、要素価格の変化に対して生じる(B)探索の効果と(C)淘汰の効果がどのようなものであるかが検討される。(B)探索の効果と(C)淘汰の効果が企業と産業の要素比率に関して標準的な結果をもたらすことが、モデルを用いた数式的な説明によって示される。

2.1. 企業と産業の反応の説明【第 7 章第 1 節】

第 7 章第 1 節では、市場条件の変化に対する企業や産業の反応を進化理論のモデルを用いて分析する。

正統派経済学では、市場条件の変化に対する企業や産業の反応は、変化の前後それぞれの市場条件がもたらす均衡状態を比較することによって求められる。そのため、正確には二つの均衡間の調整過程において企業や産業が具体的にどのような反応を行なうかは取り扱われない。各企業は常に最適な技術と最適な意思決定ルールを用いて利潤最大化を行い、規模に対して収穫一定でありすべての設備が同じルールに基づいて操業されると仮定されるため、各企業のルーチン（技術と意思決定のルール）や資本量の変化は問題とならない。

一方、進化理論経済学では、各企業は探索を行うことで技術や意思決定のルールといったルーチンを変化させる。また、各企業は経済的淘汰の力にさらされており資本量を拡大あるいは縮小させる。そして、どのような探索や淘汰が行われるかは市場条件の変化に応じて変化する。

進化理論のモデルでは、市場条件の変化に応じて生じる変化は、(A)経済の通常の効果、(B)探索の効果、(C)淘汰の効果、の三つに分けられる。上記のような仮定の差異から、進化理論的モデルで市場条件の変化に応じて生じる変化には、正統派経済学の想定する変化である(A)経済の通常の効果以外にも、(B)探索の効果と(C)淘汰の効果という二つの効果が存在する。第 7 章第 1 節では、これら三つの効果の性質と、経験的な証拠や正統派経済学の予測との関係が検討される。すなわち、進化理論で想定される市場条件の変化に対する企業や産業の反応が正統派的経済学で想定される反応とは異なっているかどうかが確かめられる。

2.1.1. モデル（pp. 165–169, 邦訳, pp. 206–210）

第 7 章第 1 節のモデルでは、企業は、製品と投入要素の価格および意思決定のルールに基づいて生産と投入要素の水準を決定し、探索によって意思決定のルールを変化させ、淘汰の力によって資本量を変化させるものと想定されている。企業 i について、生産と投入要素のベクトルを x_i、[11] 投入の水準を示す資本の大きさを k_i、意思決定ルールのパラメータを d_i、[12] とする。P を x_i に対応する生産と投入要素の価格ベクトルであるとすると、企業 i の生産と投入要素の水準を決定する意思決定ルールは以下のように表すことができる。

(1) $$\left(\frac{x_i}{k_i}\right) = D\left(P, d_i\right)$$

価格ベクトル P と意思決定ルールのパラメータ d_i に基づいて、関数 $D(\cdot)$ が生産と投入要素の水準が同時に決定する。

(1)式より、

$$x_i = D\left(P, d_i\right) k_i$$

であるので、$\sum x_i = X$、$\sum k_i = K$ とすると、

$$\sum x_i = \sum D\left(P, d_i\right) k_i$$
$$X = \sum D\left(P, d_i\right) k_i$$

となり、両辺を K で割って、産業全体の生産と投入要素の水準について以下の式が得られる。

(2) $$\left(\frac{X}{K}\right) = \sum D\left(P, d_i\right)\left(\frac{k_i}{K}\right)$$

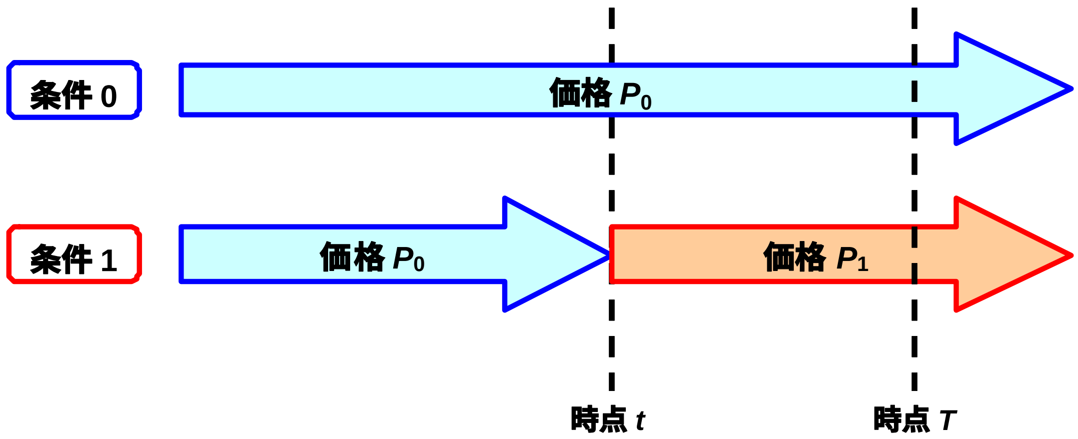
ここでは、(ア)正統派経済学が取り扱う市場条件（産出や投入要素の価格）が異なることによる $\dfrac{X}{K}$ の変化と、(イ)時間に伴う $\dfrac{X}{K}$ の変化、の両方の種類の変化を明らかにする。[13]

[11] 価格ベクトル P と x_i の内積によって利潤を求められるように、x_i の投入要素はマイナスとされる。

[12] 簡便化のために、企業間や時点間における意思決定ルールの違いは、すべてパラメータ d_i の違いとして取り扱う。

[13] 前者は(A)経済の通常の効果を指しており、後者は(B)探索の効果と(C)淘汰の効果の二つを指

図 1　第 7 章第 1 節で検討される二つの異なる市場条件



上記の二つの変化を明らかにするために、二つの異なる市場条件を考える（図 1)。条件 0 では、価格はずっと P_0 である。条件 1 では、時点 t までは価格は P_0 であり、時点 t 以降は価格は P_1 となる。

図 1 で表されているように時点 t よりも後の時点 T における、条件 0、条件 1 それぞれでの $\frac{X}{K}$ を比較することで市場条件の変化に伴う変化を明らかにする。市場条件の変化に対する変化は、(A)経済の通常の効果（along-the-rule effects、価格の変化により生じる効果)、(B)探索の効果（search effects、意思決定ルールの変化により生じる効果)、(C)淘汰の効果（selection effects、資本シェアの変化により生じる効果)、の三つの効果に分けられる。

まず、条件 0 での時点 T における $\frac{X}{K}$ は以下の(3)式のように表される。[14]

している。

[14] 条件 0 での時点 T における $\frac{X}{K}$ は、$\left(\frac{X}{K}\right)_0^T$ と表記される。下付き文字の 0 は条件 0 であることを示し、上付き文字の T は時点 T における値であることを示している。条件 0 でも条件 1 でも同じ値になる場合には（時点 t まで)、下付き文字は省略されている。以下、同様の表記が行われる。複数の時点が存在しており、かつ、数式の表記が積分と類似しているが、積分を行っているわけではなくあくまで特定の時点における値を取り扱っていることに注意が必要である。

$$(3)\ \left(\frac{X}{K}\right)_0^T = \sum D\left(P_0, d_i^t\right)\left(\frac{k_i}{K}\right)^t + \sum\left[D\left(P_0, d_{i0}^T\right) - D\left(P_0, d_i^t\right)\right]\left(\frac{k_i}{K}\right)^t + \sum D\left(P_0, d_{i0}^T\right)\left[\left(\frac{k_i}{K}\right)_0^T - \left(\frac{k_i}{K}\right)^t\right]$$

$$\left(= \sum D\left(P_0, d_{i0}^T\right)\left(\frac{k_i}{K}\right)_0^T\right)$$

(3)式の右辺は三つの項に分かれている。第一項は、時点 t における価格 P_0 についての $\frac{X}{K}$ である。第二項は、時点 t における資本シェアを用いた、時点 t と時点 T で意思決定ルールのパラメータが d_i^t から $d_i{}^T{}_0$ に変化したことから生じる時点 t との差異を示している。第三項は、時点 T における意思決定ルールのパラメータを用いた、時点 t と時点 T で各企業の資本シェアが異なることから生じる時点 t との差異を示している。

同様に、条件 1 での時点 T における $\frac{X}{K}$ は以下の(4)式のように表される。

$$(4)\ \left(\frac{X}{K}\right)_1^T = \sum D\left(P_1, d_i^t\right)\left(\frac{k_i}{K}\right)^t + \sum\left[D\left(P_1, d_{i1}^T\right) - D\left(P_1, d_i^t\right)\right]\left(\frac{k_i}{K}\right)^t + \sum D\left(P_1, d_{i1}^T\right)\left[\left(\frac{k_i}{K}\right)_1^T - \left(\frac{k_i}{K}\right)^t\right]$$

$$\left(= \sum D\left(P_1, d_{i1}^T\right)\left(\frac{k_i}{K}\right)_1^T\right)$$

(4)式の右辺は三つの項に分かれている。第一項は、時点 t における価格 P_1 についての $\frac{X}{K}$ である。第二項は、時点 t における資本シェアを用いた、時点 t と時点 T で意思決定ルールのパラメータが d_i^t から $d_i{}^T{}_1$ に変化したことから生じる時点 t との差異を示している。第三項は、時点 T における意思決定ルールのパラメータを用いた、時点 t と時点 T で各企業の資本シェアが異なることから生じる時点 t との差異を示している。

(3)式と(4)式のどちらにおいても、すべての項を足し合わせることで(2)式を用いて得られる数式（緑で表示）となることを確認して欲しい。

(3)式と(4)式の右辺はともに三つの項に分けられているが、第一項は時点 t におけるそれぞれの価格での $\frac{X}{K}$、第二項は探索により意思決定のルールが変化することによる効果、第三項は淘汰により資本シェアが変化することによる効果、を表している。

ここで、(4)式から(3)式を引くことで、市場条件の変化に対する産業全体の反応の変化

も同様に、(A)経済の通常の効果、(B)探索の効果、(C)淘汰の効果、の三つの効果に分けられる。

$$(5)\quad \left(\frac{X}{K}\right)_1^T - \left(\frac{X}{K}\right)_0^T = \sum\left[D\left(P_1, d_i^t\right) - D\left(P_0, d_i^t\right)\right]\left(\frac{k_i}{K}\right)^t$$

$$+\sum\left[D\left(P_1, d_{i1}^T\right) - D\left(P_1, d_i^t\right) - D\left(P_0, d_{i0}^T\right) + D\left(P_0, d_i^t\right)\right]\left(\frac{k_i}{K}\right)^t$$

$$+\sum\left[D\left(P_1, d_{i1}^T\right)\left[\left(\frac{k_i}{K}\right)_1^T - \left(\frac{k_i}{K}\right)^t\right] - D\left(P_0, d_{i0}^T\right)\left[\left(\frac{k_i}{K}\right)_0^T - \left(\frac{k_i}{K}\right)^t\right]\right]$$

(5)式の第一項は、意思決定のルールと資本シェアがそのままで時点 t における価格が P_0 であるか P_1 であるかによって生じる変化を示しており、これは経済の通常の効果である。第二項は、条件 0 と条件 1 で生じる意思決定ルールの変化が異なることから生じる変化を示しており、これは探索の効果といえる。第三項は、条件 0 と条件 1 で生じる各企業の資本シェアの変化が異なることから生じる変化を示しており、これは淘汰の効果といえる。[15]

2.1.2. 三つの効果のもたらす結果：標準的結果と例外的結果（pp. 169–175, 邦訳, pp. 210–219）

以下では、(A)経済の通常の効果、(B)探索の効果、(C)淘汰の効果、のそれぞれがどのようなもので、どのような結果をもたらすかについて検討する。とりわけ、変化の方向性が経験的な証拠に基づく正統派経済学の予測と一致するような結果を標準的な（standard）結果、一致しない結果を例外的な（preserve）結果と呼び、これら三つの効果がもたらす結果が標準的なものであるか例外的なものであるかを検討する。ここで、標準的な結果とは、具体的にはある投入要素の価格が上昇した際にその投入要素の投入量が減少するような変化が起きることを指している。

2.1.2.1. 経済の通常の効果（along-the-rule effects）

(A)経済の通常の効果は一般的に標準的な結果をもたらす。進化理論のモデルにおい

[15] 数式における、(A)経済の通常の効果、(B)探索の効果、(C)淘汰の効果という三つの効果の分離は、これらの効果がこの順番に生じるという経験的な仮定のもとになされている（pp. 168–169, 邦訳, p. 210)。

て、企業は利潤最大化（profit maximization）行動を取るとは想定されないが、利益追求（profit-seeking）行動を取るとは仮定されている。そのため、企業の反応は標準的な結果をもたらすと考えられる。ただし、進化理論において企業の意思決定ルールは時間をかけた進化の結果として存在するものであり、ここで達成される結果は正統派経済学が想定する利潤最大化をもたらすような最適な結果ではない。

また、(A)経済の通常の効果が常に標準的な結果をもたらすわけではない。企業が変化に対して反応しないこと、企業の目的が利潤とは異なること、企業が誤った反応を取ること、などによって標準的でない結果がもたらされる可能性がある。しかしながら、例外的な反応をする企業が存在したとしても、企業を集計した産業全体の結果は一般的に標準的な結果となるだろう。

2.1.2.2. 探索の効果

(B)探索の効果は一般的に標準的な結果をもたらす。探索には、①不可逆性（irreversibility）、②不確実性（uncertainty）、③状況依存性（contingency）、という三つの特徴がある。これらの特徴を踏まえて、探索の結果として得られた技術による費用と現在の技術による費用を比較して優れている技術を採用する、市場条件の変化が探索の期待利益を変化させることを通じて行われる探索を変化させる、市場条件の変化によって生じた利益低下という問題を解決するために探索を行う、といったことを考えると探索の効果は標準的な結果をもたらすだろう。ただし、探索により発見されたルーチンによっては例外的な結果がもたらされることもありうる。

2.1.2.3. 淘汰の効果

(C)淘汰の効果は一般的に標準的な結果をもたらす。企業の規模の変化が資本収益率に比例し、その比例係数がすべての企業について等しいならば、淘汰の効果は標準的な結果をもたらすだろう。しかし、企業の反応のタイミングがずれたり、規模の変化と資本収益率との間の比例係数が企業ごとに異なったりすれば、例外的な結果が生じうる。

2.1.3. 小括

第 7 章第 1 節では、市場条件の変化に応じて生じる変化が、進化理論のモデルでは(A)経済の通常の効果、(B)探索の効果、(C)淘汰の効果、の三つに分けられることが示され

た。正統派経済学と進化理論経済学の仮定の差異から、正統派経済学の想定する変化である(A)経済の通常の効果以外にも、(B)探索の効果と(C)淘汰の効果という二つの効果が存在する。また、(A)経済の通常の効果も正統派経済学の想定するものとは異なっている。これら三つの効果は一般的に標準的な結果をもたらし、変化の方向性は経験的な証拠や正統派経済学の予測と整合的である。しかしながら、例外的な結果も起こりうる点で正統派経済学とは大きく異なっている。

これらのことは、進化理論で想定される市場条件の変化に対する企業や産業の反応が正統派的経済学で想定される反応とは異なっていることを意味している。

2.2. 要素代替のマルコフモデル[16]【第 7 章第 2 節】

第 7 章第 2 節では、第 1 節のモデルで明らかにされた三つの効果のうち、正統派経済学では想定されてこなかった(B)探索の効果と(C)淘汰の効果の分析に焦点が当てられる。二つの投入要素が存在するマルコフ連鎖のモデルを用いて、要素価格の変化に対して生じる(B)探索の効果と(C)淘汰の効果がどのようなものであるかが数式的に検討される。

2.2.1.で、モデルの基本的な定式化が行われる。2.2.2.で、企業の行う探索がモデル化される。2.2.3.で、上記のモデルにおいて、二つの投入要素の相対価格の変化が企業の探索の結果にどのような影響を及ぼすかが検討される。この探索の効果は、企業が探索の結果として採用する技術の要素比率の確率分布の変化として現れ、標準的な結果をもたらす。2.2.4.で、産業全体としての平均要素比率にどのような変化がおきるのかが検討される。ここでは、探索の効果に加えて淘汰の効果も現れ、この二つの効果は標準的な結果がもたらされることが予測される。

このように第 2 節では、(B)探索の効果と(C)淘汰の効果が標準的な結果をもたらすことが、第 1 節と異なりモデルを用いた数式的な説明によって示される。

2.2.1. 基本的なモデル（pp. 175–178, 邦訳, pp. 219–221）

第 7 章第 2 節のモデルにおいては以下のような仮定が置かれている。各期について企業はひとつの技術と資本で表される。設備稼働ルール（生産量に関する意思決定ルール）は

[16] 第 7 章第 2 節の原著タイトルは “A markov model of factor substitution” であり、邦訳では「マルコフモデルと要素代替」と訳されているが、ここでは「要素代替のマルコフモデル」とそのまま直訳した。

考慮せず、t 期の技術と資本によって t 期の生産と投入要素の水準が決定される。産業の需要曲線は右下がりである。期と期の間に、投資と探索を行い、資本と技術を変化させる。収益性に応じて投資が行われ、規模が拡大あるいは縮小する。また、企業は探索によって新しい技術を発見し採用する。企業の資本と技術の変化に伴い、産業の生産量、投入量、および平均的な投入比率は進化する。すべての技術の資本産出比率は等しく、二つの投入要素間の要素代替に焦点を当てる。要素価格は一定であり、二つの投入要素の相対価格が異なる二つの条件を比較する。

企業の生産量を q、資本を k、二つの投入要素の投入量を x_1 と x_2 とする。k / q はすべての技術に対して一定であり、技術は二つの可変投入に対する投入係数 $a_1 = x_1 / q$ と $a_2 = x_2 / q$ によって特徴づけられる。企業は現在の技術の近くにある技術的選択肢の分布から新しい技術（a_1', a_2'）を探索する。企業は現在の技術（a_1, a_2）と新しい技術（a_1', a_2'）を比較して優れている技術を採用する。すなわち、現在の要素価格 w_1 と w_2 に対して $w_1 a_1' + w_2 a_2' < w_1 a_1 + w_2 a_2$ であれば新しい技術（a_1', a_2'）を採用し、そうでなければ現在の技術を使い続ける。探索によって発見される技術の分布に関して、投入係数の変化の比率が現在の投入係数とは独立して分布していると仮定される。

技術の変化は、U 座標と V 座標を用いた対数空間における投入係数の変化によって表される。U は要素比率の対数である。

$$U = \log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) = \log(a_2) - \log(a_1)$$

また、もうひとつの座標軸となる V は二つの投入係数の積の対数である。

$$V = \log(a_1 a_2) = \log(a_1) + \log(a_2)$$

V は技術の良さを表しており、所与の U 座標に対して小さい V 座標をもつ技術ほど優れた技術である。U は N 個の有限個の値をとり、V は無限個の値をとる。より具体的には、U のとりうる値を $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_N$、$V$ のとりうる値を$\cdots, v_{-2}, v_{-1}, v_0, v_1, v_2, \cdots$、とする。技術の U と V の値はそれぞれ定数 Δ の整数倍だけ異なっているとする。すなわち、u_0 を定数として技術（i , j）は以下のように表せる。

$$U = u_i = u_0 + i\Delta$$
$$V = v_j = j\Delta$$

ここで、u_0 は検討する要素比率の範囲を定め、Δ は技術の配列において隣接する投入係

数の大きさの割合的な差を定める。

2.2.2. 探索のモデル化（pp. 178–180, 邦訳, pp. 221–223）

上記のモデルにおいて企業は以下のような探索を行う。t 期におけるある企業の技術は (i, j) である。

$U_t = u_i$

$V_t = v_j$

探索の成果は確率変数の組 (G_t, H_t) によって決定される。G_t と H_t は、それぞれ U 次元と V 次元において企業が取るステップの数を表している。U の値が u_1 から u_N までの範囲にあるという制限を受けることに注意して、探索の結果得られる技術（U'_{t+1}, V'_{t+1})は以下のように表される。

$$U'_{t+1} = u_{i+G_t} = u_0 + (i + G_t)\Delta \quad \text{for } 1 < i + G_t < N$$
$$U'_{t+1} = u_1 = u_0 + \Delta \quad \text{for } i + G_t \leqq 1$$
$$U'_{t+1} = u_n = u_0 + N\Delta \quad \text{for } N \leqq i + G_t$$

$$V'_{t+1} = v_{j+H_t} = (j + H_t)\Delta$$

ここで、(G_t, H_t) は、(U_t, V_t) とそれ以前のすべての (U, V) の値からは独立であり、企業と時間ごとに異なる値をとり、B を定数として$-B \leqq G \leqq B$、$-B \leqq H \leqq B$ の範囲内に分布している。(G_t, H_t) の分布は、企業と時間からは独立しており一定である。

企業は、現在の技術 (U_t, V_t) と探索の結果得られた技術（U'_{t+1}, V'_{t+1}）を比較して優れている技術を次期の技術 (U_{t+1}, V_{t+1}) として採用する。ここで、探索の結果発見される技術の分布は要素価格の影響を受けないが、採用される技術の分布は要素価格の影響を受けることに注意を要する。

このように新たな技術の探索は、$t+1$ 期の技術の確率分布が、t 期の技術の条件下で (G, H) の分布と要素価格に依存して決まるというマルコフ連鎖としてモデル化されている。すなわち、企業の採用する技術の時系列変化はマルコフ連鎖を形成する。

ここで、企業の要素比率 $\exp(U_t)$ の変化も、時間に関わらず一定の推移確率を持つ有限マルコフ連鎖となる。同一の (G, H) の組は V_t の値に関わらず同一の U_t の推移をもた

らす。[17] すなわち、$(G, H)=(\beta, \gamma)$ である時、(i, j) の値に関わらず、$(u_i, v_j)\rightarrow(u_{i+\beta}, v_{j+\gamma})$ という推移が生じる。

2.2.3. 相対価格の変化に対する企業の反応（pp. 180–182, 邦訳, pp. 223–225）

以上から、時間を通じた企業の要素比率の動きは、$N\times N$ の推移確率行列 $F=\left[f_{ik}\right]$ によって表される。i と k は 1 から N の整数値を取る。状態 i は要素比率 $\exp(u_i)=a_2 / a_1$ に対応している。f_{ik} は状態 k から状態 i に推移する確率を表している。費用の比較には要素価格が用いられるが、この推移行列は時間を通じて一定である。

推移行列 F は、(ア)相対価格の上昇した投入要素の投入を減らす状態が実現する確率が高まる、(イ)探索は局所的（local）である、という二つの特徴を持つ。

(ア)相対価格の上昇した投入要素の投入を減らす状態が実現する確率が高まるとは、相対価格 w_1 / w_2 が上昇すると、どのような要素比率 a_2 / a_1 から出発したとしても、より要素比率 a_2 / a_1 が大きい状態（大きい数字で表される状態 i）が実現する確率が高まるということである。これは第 1 節で議論した標準的な結果をもたらすような反応であるといえる。

投入要素 1 の相対価格が上昇した条件での推移確率を $\hat{f}_{ik}$ として、f_{ik} と比較した違いを定式化すると以下の通りである。

$$(6)\quad \sum_{i=1}^{n}\hat{f}_{ik}\leqq\sum_{i=1}^{n}f_{ik} \qquad \text{for } n=1,\cdots,N-1 \text{ and } k=1,\cdots,N$$

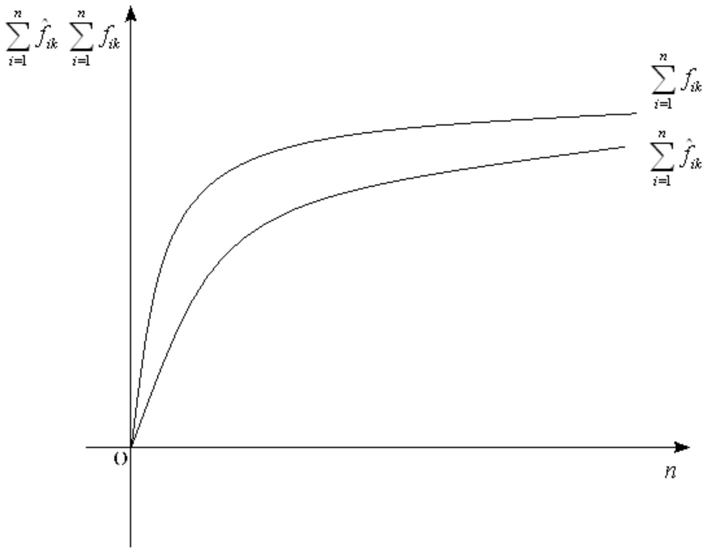
(6)式は、状態 k から状態 i への推移確率をについて、どのような $n(n=1,\cdots\cdots, N-1)$[18] と $k(k=1, \cdots\cdots, N)$ の組に対しても $\sum_{i=1}^{n}\hat{f}_{ik}\leqq\sum_{i=1}^{n}f_{ik}$ が成立することを示している。すなわ

---

[17] しかしながら、所与の U_t と V_t の下で、V_{t+1} の値が U_{t+1} の値と独立でないことに注意が必要である。投入要素 2 のシェアが投入要素 1 のシェアよりもかなり小さい場合、すなわち、$\frac{w_2}{w_1}\exp\left(U_t\right)<1\Leftrightarrow\frac{w_2a_2}{w_1a_1}<1$ の場合、V が一定な時の U のわずかな増加（投入要素 2 を相対的に多く使うような技術への移行）は費用を削減させる。そのため、そのような技術は採用される。このような場合には、U_{t+1} の値が大きくなるような技術は、V_{t+1} の値が大きくても（劣った技術であっても）要素代替によって費用が削減されるため、採用されやすい（脚注 5, p. 180, 邦訳, p. 223）。

[18] $n=N$ の場合は、もちろん右辺も左辺も 1 となり等しくなる。これは(7)式についても同様である。

図 2　f_{ik} と $\hat{f}_{ik}$ の累積グラフ



出所）筆者作成

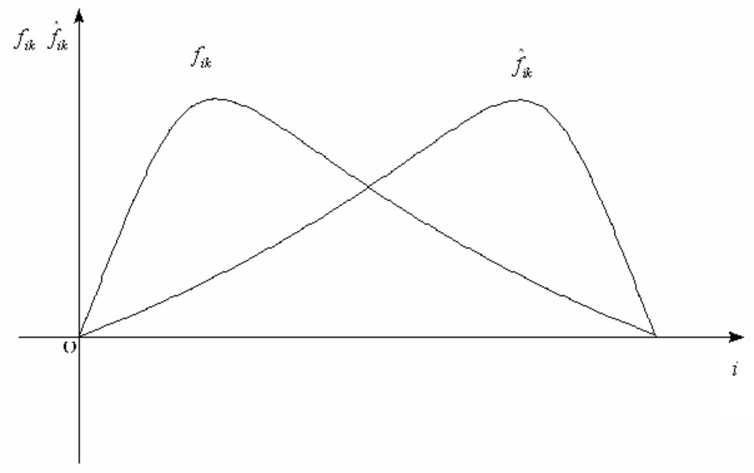
ち、 f_{ik} と $\hat{f}_{ik}$ を比較した時、 $\hat{f}_{ik}$ の方が大きい数字で表される状態 i が実現される確率が高いということである。大きい数字で表される状態 i とは、つまり、要素比率 a_2 / a_1 が大きい状態である。結局、(6)式は、相対価格 w_1 / w_2 が上昇した時の推移確率 $\hat{f}_{ik}$ について、元の推移確率 f_{ik} と比較してより要素比率 a_2 / a_1 が大きい状態（大きい数字で表される状態 i）が実現する確率が高まるということを示している。モデルの仮定から(6)式は一般的に成り立つ。

(6)式のある k についてのグラフを示すと図 2 のようになる。なお、図 2 では n を離散変数ではなく連続変数としているため、滑らかなグラフとなっている。

また、図 2 は f_{ik} と $\hat{f}_{ik}$ の n についての累積グラフであるが、ある k についての f_{ik} と $\hat{f}_{ik}$ の分布を描くと図 3 のようになる。 $\hat{f}_{ik}$ の分布は f_{ik} と比較して右に偏っており、より大きい数字で表される状態 i が実現される確率が高いことが読み取れる。

(イ)探索は局所的であるとは、要素比率が高い状態から低い状態に移動する確率は、低い状態から低い状態に移動する確率よりも小さいということである。すなわち、探索は局所的であり、現在の技術に近い要素比率を持つ技術が発見される確率が高い。

図 3　f_{ik} と $\hat{f}_{ik}$ のグラフ



出所）筆者作成

$$(7)\quad \sum_{i=1}^{n} f_{iK} \leqq \sum_{i=1}^{n} f_{ik} \qquad \text{for } n,k=1,\cdots,N-1 \quad \text{and } K>k$$

(7)式は、$K > k$ の時、状態 k から状態 i への推移確率 f_{ik} と状態 K から状態 i への推移確率 f_{iK} を比較すると、どのような n(n=1,……, N−1）と k(k=1, ……, N−1）の組に対しても $\sum_{i=1}^{n} f_{iK} \leqq \sum_{i=1}^{n} f_{ik}$ が成立することを示している。すなわち、小さい数字で表される要素比率が低い状態 i が実現される確率は、要素比率が高い状態 K からよりも、要素比率が低い状態 k から実現される確率の方が高いということである。

上記の(6)式と(7)式が厳密に不等号として成立すると仮定する。

ここで、相対価格 w_1 / w_2 の上昇したときの企業の反応は要素比率 a_2 / a_1＝exp(u_i）によって表される。マルコフ連鎖における N 個の状態上のその企業の確率分布は、i 番目の要素が 1 でその他の要素が 0 である単位ベクトル δ_i によってあらわすことができる。時点 τ において相対価格 w_1 / w_2 の変化が生じたことにより、時点 τ から先のその企業の要素比率の変化はそれまでの推移行列 F ではなく推移行列 $\hat{F}$ で表されるように変化する。ここで、$\hat{F} \succ F$ であると仮定している。この関係式は F と $\hat{F}$ を比較した時、すべての列に関して $\hat{F}$ の方がより高い要素比率へと向かう確率的な傾向にあることを示している。すなわち、相対価格の上昇に伴いより投入要素 1 を使わない方向に向かう傾向があるというこ

とを示している。ここで、推移行列 F の列の間に成立すると仮定している順序づけは付録において示されている条件(*)である。付録の定理 3 より $\hat{F} \succ F$ のとき $\hat{F}^t \succ F^t$ であり、さらに付録の定理 1 を用いると、時点 $t > \tau$ において、

$$\hat{F}^{t-\tau}\delta_i \succ F^{t-\tau}\delta_i$$

となる。これは、時点 τ における要素価格の変化により、τ の後の要素比率の確率分布はより a_2 / a_1 の高い値をとる方向にシフトしたということを表している。このシフトは、確率分布が定常分布（stationary distribution）に収束した場合でも成立する（付録の定理 4 を参照)。

2.2.4. 相対価格の変化に対する産業の反応（pp. 182–184, 邦訳, pp. 225–228）

相対価格の変化に対する企業の反応が明らかになったので、次は産業全体の要素比率がどのように変化するのかを検討する。

2.2.4.1. 各企業の要素比率の単純平均

まず、企業の要素比率の単純平均がどのような値をとるかを考える。異なる企業は時点 τ における要素比率 $\exp(U_\tau)$ と異なる V_τ の値をそれぞれ持っている。要素価格の変化により時点 τ より後のあらゆる企業の確率分布は、上記の分析から a_2 / a_1 が高くなるような方向へと変化する。時点 τ から十分に離れた時点（remote future from time τ）では、すべての企業の要素比率は推移行列 $\hat{F}$ で決まる定常分布に収束する。このため、時点 $t > \tau$ における企業の要素比率の単純平均の確率分布は標準的な方向へと変化する。また十分に大きな t に対する要素比率の単純平均の期待値は、

$$\sum_{i=1}^{N} s_i \exp(u_i) \quad \text{から} \quad \sum_{i=1}^{N} \hat{s}_i \exp(u_i)$$

へと増加する。ここで、s_i と $\hat{s}_i$ は、それぞれ F と $\hat{F}$ の定常確率ベクトルである。

2.2.4.2. 産業全体の要素比率（各企業の要素比率の加重平均）

もちろん、実際に集計された産業全体の投入要素比率 x_2 / x_1 は、各企業の要素比率を資本で加重平均した値となる。そのため、産業全体の要素比率の変化には、これまでに検討してきた(B)探索の効果に加えて、(C)淘汰の効果も含まれることになる。

時点 t において企業 m が要素比率 $U_t=u_i$（$i=1,\ \cdots\cdots,\ N$）をもつときに $I_{im}(t)=1$、それ以外のときに $I_{im}(t)=0$ であるように、N 次元の確率ベクトル $I_{im}(t)$ を定める。ここで、産業内の企業数が M であり、企業 m の資本量を $K_m(t)$ とすると、企業 m の資本シェア $Z_m(t)$ は、

$$Z_m(t)=\frac{K_m(t)}{\sum_{j=1}^{M}K_j(t)}$$

と表される。すると、産業全体の要素比率は、

$$\alpha(t)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}Z_m(t)I_{im}(t)\exp(u_i)$$

となる。産業全体の要素比率の期待値をとると、

$$E(\alpha(t))=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\exp(u_i)\left[E(Z_m(t))\cdot E(I_{im}(t))+Cov(Z_m(t),I_{im}(t))\right]$$

となる。

t が大きい時には $E(I_{im}(t))$ は $\hat{s}_i$ にほぼ等しくなり、資本シェア $E(Z_m(t))$ の合計は 1 になる。そのため、上で示した単純平均の期待値 $\sum_{i=1}^{N}\hat{s}_i\exp(u_i)$ と比較すると、共分散項 $Cov(Z_m(t),\ I_{im}(t))$ の総和分だけ異なる。

この共分散項が例外的な変化を生み出すのか、もし共分散項が例外的な変化を生み出す時には産業全体の要素比率の変化も例外的なものとなるのか、はモデルからははっきりとしない。

しかし、共分散項は、価格変化が起きた時点 τ から近い時点では標準的な方向への淘汰の効果を反映し、時間が無限に近づくにつれてゼロに近づくと考えられる。価格変化が起こると、要素比率を徐々に変化させる探索が行われる長期に渡る過渡期が生じる。この探索の過程において、正しい方向へ素早く動いた企業は費用低下により相対的に高い成長性を達成するだろう。要素価格変化の直後には、このような標準的な方向への淘汰の効果が生じると考えられる。一方、時点 τ から十分に離れた時点では、各企業の要素比率は定常確率 $\hat{s}$ に従って分布するとみなせる。

2.3. 小括

第 7 章では、第 6 章の議論を受けて、均衡を変化させるような市場条件の変化に対する企業や産業の反応を進化理論のモデルを用いて分析した。市場条件の変化として具体的には要素価格の変化が取り扱われる。

まず、第 1 節で、市場条件の変化に応じて生じる変化は、(A)経済の通常の効果、(B)探索の効果、(C)淘汰の効果、の三つに分けられる。すなわち、正統派経済学の想定する変化である(A)経済の通常の効果以外にも、(B)探索の効果と(C)淘汰の効果という二つの効果が存在することが示される。そして、三つの効果は一般的に経験的な証拠や正統派経済学の予測と整合的である標準的な結果をもたらすものの、例外的な結果も起こりうることが述べられる。

第 2 節では、第 1 節で明らかになった三つの効果のうち正統派経済学では想定されてこなかった(B)探索の効果と(C)淘汰の効果のモデル化が行われる。二つの投入要素が存在するマルコフ連鎖のモデルを用いて、要素価格の変化に対して生じる(B)探索の効果と(C)淘汰の効果が、企業と産業の要素比率の変化に関して標準的な結果をもたらすことが示される。

モデルによって示されたように進化理論的な見方（evolutionary perspective）をしても、正統派経済学と同様の標準的な結果を得られる。進化理論を用いることで定量的にも正統派的経済学と同程度の予測ができるはずである。[19] 進化理論を用いることで、定式化された理論（formal version of theory）と問題となっている現象のアプリシエイティブな理論（appreciative theory of the phenomenon in question）とをより一致させることができる。そして、正統派経済学では想定されていない(B)探索の効果と(C)淘汰の効果を考慮することは――例えば正統派経済学では外生的なパラメータとして扱われていた代替弾力性や供給弾力性といった変数が進化理論の立場では内生化され、その結果として政策課題に与えるインプリケーションも異なるというような――違いをもたらす。さらに、進化理論的アプローチは成長理論（第 IV 部）やシュンペーター的競争（第 V 部）といった動的な問題へと拡張できる。

謝辞

本稿を執筆するにあたり東京大学大学院経済学研究科の高橋伸夫先生から多大なご指導を賜りま

[19] このような進化理論のモデルにおける定量的な予測は第 9 章で取り扱われる。

した。また、東京大学大学院経済学研究科修士課程の川島美紀氏、徐寧教氏とのディスカッションにより理解を深めることができました。ここに記して感謝申し上げます。

参考文献

Nelson, R. R., & Winter, S. G. (1975). Factor price changes and factor substitution in an evolutionary model. *Bell Journal of Economics*, *6*, 466–486.

Nelson, R. R., & Winter, S. G. (1980). Firm and industry response to changed market conditions: An evolutionary approach. *Economic Inquiry*, *18*(2), 179–202.

Nelson, R. R., & Winter, S. G. (1982). *An evolutionary theory of economic change*. Cambridge, MA: The Belknap Press of Harvard University Press. 邦訳, リチャード・R・ネルソン、シドニー・G・ウィンター (2007)『経済変動の進化理論』後藤晃, 角南篤, 田中辰雄 訳. 慶應義塾大学出版会.

若林隆久, 氷熊大輝, 岡本伊織 (2010)「技術進化の変化率：経営学輪講 Nelson and Winter (1982), Chapter 10」『赤門マネジメント・レビュー』*9*(6), 385–404. http://www.gbrc.jp/journal/amr/AMR9-6.html

Winter, S. G. (1964). Economic ‘natural selection’ and the theory of the firm. *Yale Economic Essays*, *4*, 225–272.

Winter, S. G. (1971). Satisficing, selection, and the innovating remnant. *Quarterly Journal of Economics*, *85*(2), 237–261.

付録 A　第 6 章のモデルが淘汰均衡へ到達することの証明（pp. 150–152, 邦訳, pp. 189–192）

第 6 章のモデルが、初期状態において淘汰均衡の状態でない場合に、淘汰過程によって淘汰均衡に到達することは有限マルコフ連鎖の理論を用いて示される。どのような初期状態からでも均衡状態に到達するような有限な一連の正の確率の状態推移があるということを示せば、Feller（1957, pp. 352–353, 364, 邦訳, pp. 485–487, 501–502）の結果[20] により、産業が均衡状態に達する確率が時間が経過するにつれて 1 に近づくということが示される。

ここでは、(ア)淘汰均衡は閉じた集合である、(イ)産業の状態は有限である、(ウ)いかなる状態からでも正の確率をもつ有限回のステップで E に到達できる、ということを示すことを通じて、淘汰過程によってモデルが淘汰均衡に到達することが示される。

A.1. 淘汰均衡は閉じた集合である

まず、上記の淘汰均衡において均衡状態は継続する。このことをマルコフ過程の言葉で言い換えれば、均衡状態の集合 E は状態の閉じた集合（closed set of state）であり、一度状態 E が生じればその後に生じる状態はすべて E である。

A.2. 産業の状態は有限である

次に、ある初期条件から達成されうる産業の状態は有限であることを示す。産業の状態は M 個の企業の状態からなっており、企業の状態は三つの変数の組（c_{it}, α_{it}, k_{it}）によって表されることを考慮すると、企業の状態が有限であればよい。ここで、利用可能な技術の集合と利用可能な設備稼働ルールの集合はともに有限であるので、産業の資本が有限であることがわかればよい。

ある技術と設備稼働ルールの組み合わせ（c, α）について、次の二つの式を満たす資本 k の最大値 $K(c, \alpha)$ が存在する。

[20] Feller, W. (1957). *An introduction to probability theory and its applications*. New York: Wiley. 邦訳, W・フェラー (1960)『確率論とその応用(上・下)』卜部舜一, 羽鳥裕久, 大平坦, 河田龍夫, 国沢清典 訳. 紀伊國屋書店. Feller は、行列により状態推移を考えている。簡単に要約すると、状態 i から状態 j に n 時点後に初めて移る確率を $f_{ij}^{(n)}$ とすると、t 期に状態 i から状態 j に達している確率は $\sum_{n=1}^{t} f_{ij}^{(n)}$ として表される。いかなる初期状態からも均衡状態に導くような正の確率が存在するならば、つまり、いかなる初期状態 i からも n 時点後に均衡状態 j に達する確率が正であるならば、つねに $f_{ij}^{(n)} > 0$ であるということを示しており、産業が均衡状態 j に達する確率が時間が経過するにしたがって 1 に近づいていくと考えている。しかし、実際にはこれだけの説明では十分に証明されていない可能性が高い。

(11) $(P-c)\alpha\left(\frac{P}{c}\right)-r \geqq 0$

(12) $P=h\left[\alpha\left(\frac{P}{c}\right)k\right]$

(11)式および 0≦α(・)≦1 であることから $\alpha\left(\frac{P}{c}\right)$ が正であることがわかる。需要価格関数は右下がりであり、もし産業の総生産量が十分に大きければどのような技術と設備稼働率ルールも利潤を生み出さないという仮定から、この二つの式を満たす k には最大値 $K(c, \alpha)$ が存在する。当然の結果として、(c, α) という技術と設備稼働ルールの組み合わせを持つ企業の資本の合計が $K(c, \alpha)$ よりも大きい場合には、(c, α) という組み合わせは利潤を生み出さない。

ここで、$\overline{K}=\mathrm{Max}\ K(c, \alpha)$ とする。投資に関する仮定から、$k_{t+1}-k_t$ の最大値は Δ であるので、$\overline{K}+\Delta$ を超える規模へと拡大することはできない。企業が $\overline{K}+\Delta$ を超える状態へと推移するためには、それ以前の状態自体が $\overline{K}+\Delta$ を超えていなければならない。このとき企業は何らかの技術と設備稼働ルールの組み合わせ (c, α) を持っているが、損失を生み出すために縮小する。よって、企業 i の初期状態における資本を k_{i1} とすると、企業 i の資本の上限は $\mathrm{Max}(k_{i1}, \overline{K}+\Delta)$ となり、これは有限な値である。各企業の資本の値が有限であれば、産業の資本の値も有限となる。

以上から、産業の状態が有限であることが示された。

A.3. いかなる状態からでも正の確率を持つ有限回のステップで E に到達できる

本稿の脚注 6 でも述べているように、企業数 M が十分に大きいと仮定されるため、必ず利潤が負の企業か潜在企業が存在することとなり、探索を行う企業が少なくともひとつは存在することになる。結果として、最適な技術と適格な設備稼働ルールが発見されることになる。

そこで、適格な企業（最適な技術と適格な設備稼働ルールを持つ企業）が少なくともひとつ存在する状態から、正の確率で均衡状態の集合 E への一歩（a step toward the set E of equilibrium states）を進むことがいつも可能であることを示す。適格でない企業（noneligible firms）の資本の合計を k_n、適格な企業（eligible firms）の資本の合計を k_e、均衡資本量を k^* とする。企業および産業の資本が 0 以上の整数で表されることに注意すれば、所与の状態と E の間には $k_n+|k_e-k^*|$ で表される数のステップが存在する。k_n は適格でない企業が資本を減らしていくステップ数を示しており、$|k_e-k^*|$ は適格な企業の資本量が均衡資本量に一致するまで変化するステップ数を示している。有限な産業の状態に対してこのステップ数は有限である。

どのような状態であっても、正の確率で E に向かうステップを踏むことは以下のように示される。

(i) 価格が $\hat{c}+r$ よりも大きいときは、明らかに $k_e < k^*$ であり、利益を生み出している適格な企業が資本を拡大させる確率は正である。すなわち、正の確率で E に向かうステップを踏む。

(ii) 次に、価格が $\hat{c}+r$ 以下であるときを考える。①$k_n > 0$ の時、正の資本を持つ適格でない企業は必ず損失を生み、適格でない企業が資本を縮小させる確率は正である。すなわち、正の確率で E に向かうステップを踏む。②$k_n = 0$ の時、必ず $k_e \geqq k^*$ である。ここで、$k_e > k^*$ ならば、適格な企業は必ず損失を生み、適格な企業が資本を縮小させる確率は正である。すなわち、正の確率で E に向かうステップを踏む。また、$k_e = k^*$ ならば、その状態はすでに E にある。

このような議論を繰り返すことにより、いかなる初期状態からでも、正の確率をもつ有限回のステップで E に到達できるということが示された。

以上から、Feller（1957）の結果により、初期状態において淘汰均衡の状態になくても、淘汰過程によって第 6 章のモデルは淘汰均衡に到達することが示された。

付録 B　第 7 章 Appendix

第 7 章第 2 節で用いられる四つの定理が記載されている第 7 章付録の内容を説明する。なお、原著および邦訳に多くの誤りが存在していたので、冒頭で述べたルールに従い色分けをして誤りを修正している。

付録では以下のような定義がなされる。R^N（N 次元の空間）における二つのベクトル $x=(x_1, x_2, \cdots, x_N)$, $y=(y_1, y_2, \cdots, y_N)$ について、すべての $n=1, 2, \cdots, N$ に関して、$\sum_{i=1}^{n} x_i \geqq \sum_{i=1}^{n} y_i$ が成り立てば、$y \succsim x$ と表す。このとき、y に関する累積分布が、x に関する累積分布よりも右側に位置していることを示している。また、$y \succsim x$ であり $x \succsim y$ でないならば、$y \succ x$ である。このとき、$y \succ x$ という記述は、$\sum_{i=1}^{n} x_i \geqq \sum_{i=1}^{n} y_i$ のうちの少なくともひとつに関して、≧でなく＞が成り立っていることと同値である。

また、行列 A, B があり、それぞれの列について、$j=1, 2, \cdots, N$ において、$b_j \succsim a_j$ ならば、つま

り、すべての列（$j=1, 2, \cdots, N$）に関してb_jの累積分布が、a_jの累積分布よりも右側によっているならば、$B \succsim_c A$と表す。もしあるjについて、$B \succsim_c A$かつ$b_j \succ a_j$[21] なら、$B \succ_c A$である。

B.1. 定理 1

もし$B \succsim_c A$かつ$x \geqq 0$ならば$Bx \succsim Ax$である。

証明

$y^a = Ax$、$y^b = Bx$とし、$d_n = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i^a - y_i^b\right)$と定義すると、

$$d_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j - \sum_{j=1}^{N} b_{ij}x_j\right)$$

と表される。順番を入れ替えてくくりだすと、

$$d_n = \sum_{j=1}^{N} x_j\left(\sum_{i=1}^{n}\left(a_{ij} - b_{ij}\right)\right)$$

ここで、$c_{nj} = \sum_{i=1}^{n}\left(a_{ij} - b_{ij}\right)$とすると、

$$d_n = \sum_{j=1}^{N} x_j c_{nj}$$

となる。$B \succsim_c A$という仮定により、$b_j \succsim a_j$であり、$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \geqq \sum_{i=1}^{n} b_{ij}$であるので、$c_{nj} = \sum_{i=1}^{n}\left(a_{ij} - b_{ij}\right) \geqq 0$である。また、$x_j \geqq 0$であるので、

$$d_n = \sum_{j=1}^{N} x_j c_{nj} \geqq 0$$

となり、これより、

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^a \geqq \sum_{i=1}^{n} y_i^b$$

である。ゆえに、$Bx \succsim Ax$ということが示された。

$B \succ_c A$であるなら、つまり、もしあるjについて、$B \succsim_c A$かつ$b_j \succ a_j$なら、あるnとjに関し

[21] 原著では$b_j \succsim a_j$とされているが、その場合$B \succ_c A$とはならず$B \succsim_c A$のままになってしまうので、本稿では$b_j \succ a_j$と訂正した。

て、$c_{nj} > 0$であり、もし$x > 0$（つまり、すべての要素について 0 より大きい）ならば、あるnについて$d_n > 0$を満たすので、$Bx \succ Ax$である。

さらに、すべての$j = 1, 2, \cdots, N-1$に関して、$b_j \succ a_j$であるときのことを考える。この仮定は第 7 章の議論において重要であるので、すべての$j = 1, 2, \cdots, N-1$に関して、$b_j \succ a_j$ならば、$B \succ A$とあらわすことにする。このとき、$x \geqq 0$かつ$x \neq 0$（つまり、すべての要素が 0 以上であるが、すべて 0 ではない）[22] ならば、$Bx \succ Ax$であり、これは、AとBが$B \succ A$を満たす推移確率行列であるとき、xが確率ベクトル（このとき、xが半正値）なら、$Bx \succ Ax$であることを意味する。

第 7 章では、推移行列が状態の順序の分布を大きく変えることはないという点について大きな関心を置いた。例えば、時点 t に状態 N（一番要素比率が高い水準）にすべて集中しているとすると、時点t+1 には「非常に右に偏った」分布になるであろうし、時点tに状態$N-1$や$N-2$などのほかのところに集中しているような場合に比べてかなり右によっていると考えられる。[23]

ここで、この考え方に沿って以下のように考察していく。

B.2. 定理 2

$y \succsim x$であり、行列Aが条件(*) $a_N \succsim a_{N-1} \succsim \cdots \succsim a_1$を満たすなら、$Ay \succsim Ax$である。

証明

$z^x = Ax$、$z^y = Ay$、$d_n = \sum_{i=1}^{n}\left(z_i^x - z_i^y\right)$とすると、このとき、

$$d_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j - \sum_{j=1}^{N} a_{ij}y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\left(x_j - y_j\right) = \sum_{j=1}^{N}\left(x_j - y_j\right)\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

であり、$c_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ とすると、

$$d_n = \sum_{j=1}^{N}\left(x_j - y_j\right)c_{nj}$$

となる。ここで、行列Aについての条件(*)により、$n = 1, 2, \cdots, N$について、

$$c_{n1} \geqq c_{n2} \geqq \cdots \geqq c_{nN} \geqq 0$$

であり、総和であるd_nは以下のように書き換えることができる。

[22] 本文では “semipositive” (邦訳：半正値）と述べられている。
[23] この文章に関しては、邦訳の間違えがあると考えられるため修正した。

$$d_n = c_{nN}\sum_{j=1}^{N}\left(x_j - y_j\right) + \left(c_{n(N-1)} - c_{nN}\right)\sum_{j=1}^{N-1}\left(x_j - y_j\right)$$
$$+\left(c_{n(N-2)} - c_{n(N-1)}\right)\sum_{j=1}^{N-2}\left(x_j - y_j\right) + \cdots + \left(c_{n1} - c_{n2}\right)\left(x_1 - y_1\right)$$

$y \succsim x$ より、すべての $k = 1, 2, \cdots, N$ に関して、$\sum_{j=1}^{k} x_i \geqq \sum_{j=1}^{k} y_i$、つまり、$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i) \geqq 0$ が成り立ち、また、すべての $j = 1, 2, \cdots, N-1$ に関して、$c_{nj} - c_{n(j+1)} \geqq 0$ であり、$c_{nN} \geqq 0$ であるので、すべての n に関して、$d_n \geqq 0$ である。よって、$y \succsim x$ であり、行列 A が条件(*)を満たすなら、$Ay \succsim Ax$ である。$Ay \succ Ax$ が成り立つためには、$y \succsim x$ であり、かつ $a_N \succ a_{N-1} \succ \cdots \succ a_1$ が成立すればよい。

この定理 2 は推移行列 A が条件(*)を満たせば、二つのベクトルの順序が保持されるということを述べている。

また、行列 A の m 乗は、この過程における m 回の推移の結果の確率の行列を表しており、これは行列 A を自身へ繰り返しかけることによって得られる。もし、これらの列が、条件(*)が意味しているように、$\succsim$ で順序づけられていれば、その順序は行列 A の累乗においても保持される。さらに、もし二つの行列が $\succsim_c$ によって関係付けられているならば、その関係もまたそれらの行列の累乗においても保持される。これに関しては、以下の定理で表される。

B.3. 定理 3

もし A と B が非負の行列であり、A が定理 2 の条件(*) $a_N \succsim a_{N-1} \succsim \cdots \succsim a_1$ を満たし、$B \succsim_c A$ ならば、そのときすべての正の整数 t について、$B^t \succsim_c A^t$ が成り立つ。

証明

このことについて、数学的帰納法によって証明する。

[I]　$t = 1$ のとき

これは仮定より明らかに満たされているので、成り立つ。

[II]　$t = m$ のときに成り立つと仮定する。

a_j^m が A^m の j 番目の列を表し、b_j^m が B^m の j 番目の列を表すと仮定する。このとき、

$$a_j^{m+1} = Aa_j^m$$

であり、$B^m \succsim_c A^m$ が成り立つと仮定しているので、$b_j^m \succsim a_j^m$ であり、定理 2 より、

$$Ab_j^m \succsim Aa_j^m$$

が成り立つ。ここで、Bが非負の行列であるので、B^mも非負であり、$b_j^m \geqq 0$であり、かつ$B \succsim_c A$であるので、定理 1 より、

$$b_j^{m+1} = Bb_j^m \succsim b_j^m$$

ゆえに、

$$b_j^{m+1} = Bb_j^m \succsim Ab_j^m \succsim Aa_j^m = a_j^{m+1}$$

となり、これが、すべてのjについて成り立つので、

$$B^{m+1} \succsim_c A^{m+1}$$

よって、$t = m+1$のときも成り立つことが示された。

[I]、[II]より、数学的帰納法により、もしAとBが非負の行列であり、Aが定理 2 の条件【*】を満たし、$B \succsim_c A$ならば、そのときすべての正の整数tについて、$B^t \succsim_c A^t$が成り立つということが示された。

$B^t \succ_c A^t$となるのは、上記の証明において、$Ab_j^m \succsim Aa_j^m$あるいは、$Bb_j^m \succsim Ab_j^m$のどちらかが、$Ab_j^m \succ Aa_j^m$か$Bb_j^m \succ Ab_j^m$となり、$b_j^m \succ a_j^m$が成り立つときである。これは、$B \succ_c A$で、条件(*)がAかBに厳格にあてはまれば（つまり$\succsim$でなく$\succ$で成り立っていれば）成立する。もし、条件(*)がAに厳格にあてはまっていて、かつ$B \succ A$であれば、すべてのtに関して、$B^t \succ A^t$が成り立つ。

B.4. 定理 4

AとBがマルコフ行列（全ての列の合計が 1 である非負の行列）とする。Aが唯一の定常確率ベクトルx^A、つまり、最大の固有値に対応する非負の固有ベクトルをもつとする。また、x^BをBの定常確率ベクトル[24] とする。もし条件(*) $a_N \succsim a_{N-1} \succsim \cdots \succsim a_1$が$A$に成立し、$B \succsim_c A$であれば、$x^B \succsim x^A$である。

証明

$B \succsim_c A$であり、x^Bは非負であるので、定理 1 より、

[24] このとき、$x^B = Bx^B$である。

$$Bx^B \succsim Ax^B$$

であり、$x^B = Bx^B$であるので、

$$x^B \succsim Ax^B$$

である。ここで、行列Aが条件(*)を満たすので、定理 2 を繰り返し用いると、

$$Ax^B \succsim A\left(Ax^B\right)$$
$$A\left(Ax^B\right) \succsim A\left(A^2x^B\right), etc.$$

となる。つまり、$t = 1,2,\cdots$について、$A^{t-1}x^B \succsim A^t x^B$である。ここで、$x^A$が行列$A$の定常確率ベクトルであることから、$\lim_{t\to\infty} A^t x^B = x^A$であるので、

$$x^B \succsim Ax^B \succsim A^2x^B \cdots \succsim x^A$$

であり、$x^B \succsim x^A$であることが示された。条件(*)が行列Aに関して厳密に満たされ、$x^B \succ Ax^B$が成り立つならば、$x^B \succ x^A$である。また、条件$x^B \succ Ax^B$が成り立つためには、$x^B > 0$かつ$B \succ_c A$であるか、または、x^Bが半正値であり、かつすべてのjに関して、$b_j \succ a_j$[25] であればいい。

定理 4 は、推移行列Aが推移行列Bよりも低い番号の状態により高い確率を与えるとすると、Aの定常確率分布は、Bの定常確率分布に比べて、低い番号の状態により高い確率を与えるということを表している。

[25] つまり、$B \succ A$であることを示していると考えられる。

赤門マネジメント・レビュー　9 巻 7 号 2010 **年** 7 **月** 25 **日発行**

編集　東京大学大学院経済学研究科 ABAS/AMR 編集委員会

発行　特定非営利活動法人グローバルビジネスリサーチセンター

理事長　高橋 伸夫

東京都文京区本郷

http://www.gbrc.jp